

## 8.2.11 Vlastnosti aritmetických a geometrických posloupností

**Předpoklady:** 080105, 080201, 080205

**Pedagogická poznámka:** Cílem hodiny není naučit studenty tabulku, která uvádí, jak závisí vlastnosti posloupnosti na jejích koeficientech. I kdyby se studenti tyto údaje naučili, za chvíli je zapomenou. Cílem hodiny je, aby studenti sami zkusili tuto tabulku objevit. Hodina má tři fáze:

Nejdříve studenti sepíší tabulku vlastností. V druhé fázi prozkoumají vlastnosti aritmetických posloupností. Tabulku i způsob, jakým jsme ji získali, společně probereme a zbývajících 30 (minimálně 25 minut) mají studenti na to, aby samostatně sestavili podobný přehled pro geometrickou posloupnost. Dopředu je upozorňuji, že u geometrických posloupností je situace složitější a je potřeba si lépe kontrolovat výsledky. Na konci si vybírám závěrečné přehledy i postup práce a hodnotím.

Během práce studenty kontroluji, a snažím se trochu pomoci těm, kteří tápou, tím, že nabízím posloupnosti, které by měli vyzkoušet.

**Př. 1:** Sepiš vlastnosti, které jsme určovali u posloupnosti a způsoby, jakými tyto vlastnosti dokazujeme.

| Vlastnost posloupnosti | pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: |
|------------------------|-------------------------------------|
| rostoucí               | $a_n < a_{n+1}$                     |
| klesající              | $a_n > a_{n+1}$                     |
| neklesající            | $a_n \leq a_{n+1}$                  |
| nerostoucí             | $a_n \geq a_{n+1}$                  |
| zdola omezená          | $a_n \geq d, d \in \mathbb{R}$      |
| shora omezená          | $a_n \leq H, H \in \mathbb{R}$      |

V této hodině se budeme dále zabývat pouze tím, zda jsou posloupnosti omezené (omezené shora nebo zdola) a zda jsou rostoucí nebo klesající.

**Př. 2:** Otestuj několik aritmetických posloupností a zjisti, jak závisí vlastnosti těchto posloupností na hodnotách  $a_1$  a  $d$ .

Zvolíme například:

$a_1 = 1, d = 2 \Rightarrow 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; \dots$  rostoucí, zdola omezená

$a_1 = 1, d = 0 \Rightarrow 1; 1; 1; 1; 1; 1; \dots$  konstantní, omezená

$a_1 = 1, d = -3 \Rightarrow 1; -2; -5; -8; -11; -14; -17; \dots$  klesající, shora omezená

zkusím změnit  $a_1$

$a_1 = -4, d = 2 \Rightarrow -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8; \dots$  rostoucí, zdola omezená (vlastnosti po

změně  $a_1$  zůstaly stejné)

Záleží pouze na diferenci, první člen na vlastnosti nemá vliv.

Aritmetická posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  s diferencí  $d$  je:

- rostoucí, právě když  $d > 0$ ,
- klesající, právě když  $d < 0$ ,
- konstantní, právě když  $d = 0$ .

Aritmetická posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  s diferencí  $d$  je:

- zdola omezená, není shora omezená, právě když  $d > 0$ ,
- shora omezená, není zdola omezená, právě když  $d < 0$ ,
- omezená shora i zdola, právě když  $d = 0$ .

Výsledky můžeme zapsat dvěma způsoby:

1. Vlevo uvedeme vlastnost a vpravo, pro které hodnoty  $a_1$  a  $d$  aritmetická posloupnost má tuto vlastnost.

| <b>Monotónnost aritmetických posloupností <math>(a_n)_{n=1}^{\infty}</math> s diferencí <math>d</math></b> |         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| Rostoucí                                                                                                   | $d > 0$ |
| Klesající                                                                                                  | $d < 0$ |
| Konstantní                                                                                                 | $d = 0$ |
| Bez monotónnosti                                                                                           |         |

| <b>Omezenost aritmetických posloupností <math>(a_n)_{n=1}^{\infty}</math> s diferencí <math>d</math></b> |         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| Zdola omezená, není shora omezená                                                                        | $d > 0$ |
| Shora omezená, není zdola omezená                                                                        | $d < 0$ |
| Omezená (omezená shora i zdola)                                                                          | $d = 0$ |
| není ani zdola omezená, ani shora omezená                                                                |         |

2. Vlevo uvedeme hodnoty  $a_1$  a  $d$  a vpravo vlastnosti, které aritmetická posloupnost pro tyto hodnoty má.

| <b>Vlastnosti aritmetických posloupností <math>(a_n)_{n=1}^{\infty}</math> s diferencí <math>d</math></b> |                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| $d > 0$                                                                                                   | Rostoucí, zdola omezená, není shora omezená  |
| $d < 0$                                                                                                   | Klesající, shora omezená, není zdola omezená |
| $d = 0$                                                                                                   | Konstantní, omezená (omezená shora i zdola)  |

Přehledy uvedené výše nemají z hlediska matematiky velkou cenu. Daleko cennější je postup, kterým jsme je objevili. U aritmetických posloupností je situace poměrně jednoduchá, ale přesto má stejné rysy jako například hledání závad (obecně, ne v matematice). Neustále střídáme experimenty (psaní konkrétních posloupností) s hodnocením situace (jaké vlastnosti posloupnosti mají) a vymýšlením hypotéz o důvodech (který z koeficientů posloupnosti vlastnost způsobil), které ihned musíme testovat dalším experimentem (konkrétní posloupností, která by měla mít nějakou vlastnost). Velkou roli hraje naše schopnost vyzkoušet „všechny zajímavé“ možnosti.

Nyní zkusíme použít naše zkušenosti ve znatelně obtížnější situaci, která nastane, když se pokusíme sestavit podobný přehled pro geometrické posloupnosti.

**Př. 3:** Otestuj několik geometrických posloupností a zjisti, jak závisí vlastnosti těchto posloupností na hodnotách  $a_1$  a  $q$ .  
 Výsledky shrň do dvou tabulek: *Monotónnost geometrických posloupností* a *Omezenost aritmetických posloupností*, které budou mít stejný levý sloupec jako odpovídající tabulky pro aritmetické posloupnosti.

Zvolíme například:

$$a_1 = 1, q = 2 \Rightarrow 1; 2; 4; 8; 16; \dots \text{ rostoucí, zdola omezená}$$

$$a_1 = -1, q = 2 \Rightarrow -1; -2; -4; -8; -16; \dots \text{ klesající, shora omezená}$$

$\Rightarrow$  tedy záleží i na počátečním členu

$$a_1 = 1, q = -2 \Rightarrow 1; -2; 4; -8; 16; \dots \text{ ani rostoucí ani klesající, není omezená}$$

$\Rightarrow$  když je kvocient záporný, neustále se střídají znaménka posloupnosti a posloupnost nemůže být ani rostoucí ani klesající

čísla se zmenšují, když násobím například 0,5

$$a_1 = 1, q = \frac{1}{2} \Rightarrow 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots \text{ klesající, omezená shora i zdola}$$

$\Rightarrow$  už jednou se situace změnila, když jsem změnil znaménko prvního členu  $\Rightarrow$

$$a_1 = -1, q = \frac{1}{2} \Rightarrow -1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; -\frac{1}{16}; \dots \text{ rostoucí, omezená shora i zdola}$$

Zkusíme situaci shrnout:

**rostoucí posloupnosti:**

- $a_1 = -1, q = 2$  - kladné číslo, které násobíme kladným číslem větším než 1  $\Rightarrow$  rostoucí budou všechny posloupnosti s  $a_1 > 0$  a  $q > 1$
- $a_1 = -1, q = \frac{1}{2}$  - záporné číslo, které násobíme kladným číslem menším než jedna, absolutní hodnota výsledku se zmenšuje a tím hodnoty neustále rostou k nule  $\Rightarrow$  rostoucí budou všechny posloupnosti s  $a_1 < 0$  a  $0 < q < 1$

**klesající posloupnosti:**

- $a_1 = -1, q = 2$  - záporné číslo, které násobíme kladným číslem větším než 1  $\Rightarrow$  klesající budou všechny posloupnosti s  $a_1 < 0$  a  $q > 1$
- $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$  - kladné číslo, které násobíme kladným číslem menším než jedna, absolutní hodnota výsledku se zmenšuje a tím hodnoty neustále klesají k nule  $\Rightarrow$  klesající budou všechny posloupnosti s  $a_1 > 0$  a  $0 < q < 1$

**zbývající možnosti**

- pro  $a_1 \neq 0; q < 0$  není geometrická posloupnost ani rostoucí ani klesající, hodnoty neustále mění znaménko
- pro  $a_1 = 0$  je geometrická posloupnost konstantní bez ohledu na  $q$
- pro  $a_1 \neq 0; q = 1$  je geometrická posloupnost konstantní

Nyní můžeme přejít k omezenosti

máme posloupnosti rozdělené do sedmi skupin, pouze u skupiny  $a_1 \neq 0; q < 0$  nevíme, jak je to s omezeností  $\Rightarrow$  možnosti:

$a_1 = -2, q = -2 \Rightarrow -2; 4; -8; 16; -32; \dots$  posloupnost není omezená ani shora ani zdola, bude to tak platit pro všechna  $q < -1$  (zvětšují absolutní hodnotu členů posloupnosti)

$a_1 = -2, q = -\frac{1}{2} \Rightarrow -2; 1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \dots$  posloupnost je omezená shora i zdola, bude to platit pro všechna  $-1 \leq q < 0$

Shrneme situaci pro omezenost:

#### shora i zdola omezená posloupnost

- $a_1 = -1, q = \frac{1}{2}$  - záporné číslo, které násobíme kladným číslem menším než jedna, absolutní hodnota výsledku se zmenšuje a tím hodnoty neustále rostou k nule  $\Rightarrow$  platí pro  $a_1 < 0$  a  $0 < q < 1$
- $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$  - kladné číslo, které násobíme kladným číslem menším než jedna, absolutní hodnota výsledku se zmenšuje a tím hodnoty neustále klesají k nule  $\Rightarrow$  platí pro  $a_1 > 0$  a  $0 < q < 1$
- pro  $a_1 = 0$  je geometrická posloupnost konstantní bez ohledu na  $q$
- pro  $a_1 \neq 0; q = 1$  je geometrická posloupnost konstantní
- $a_1 = -2, q = -\frac{1}{2}$  - libovolné číslo násobím  $q \in \langle -1; 0 \rangle$  hodnoty se postupně přibližují k nule (i když se mění jejich znaménka)  
 $\Rightarrow$  všechny možnosti můžeme shrnout do podmínky  $|q| \leq 1$ , na  $a_1$  nezáleží

#### shora omezená, zdola neomezená

- $a_1 = -1, q = 2$  - záporné číslo, které násobíme kladným číslem větším než 1, členy posloupností klesají pod jakoukoliv mez, platí vždy pro  $a_1 < 0$  a  $q > 1$

#### zdola omezená, shora neomezená

- $a_1 = 1, q = 2$  - kladné číslo, které násobíme kladným číslem větším než 1  $\Rightarrow$  členy rostou nade všechny meze, platí pro  $a_1 > 0$  a  $q > 1$

#### neomezená

- pro  $a_1 = 1, q = -2$  členy neustále mění znaménko, jejich absolutní hodnota se neustále zvětšuje, platí pro  $a_1 \neq 0; q < -1$

| Monotónnost geometrických posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem $q$ |                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| Rostoucí                                                                       | $a_1 > 0; q > 1$ nebo $a_1 < 0; 0 < q < 1$  |
| Klesající                                                                      | $a_1 < 0; q > 1$ nebo $a_1 > 0; 0 < q < 1$  |
| Konstantní                                                                     | $a_1 \in R; q = 1$ nebo $a_1 = 0; q = 0$    |
| Bez monotónnosti                                                               | $a_1 \in R; q < 0$ nebo $a_1 \neq 0; q = 0$ |

| Omezenost geometrických posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem $q$ |                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| Zdola omezená, není shora omezená                                            | $a_1 > 0; q > 1$                                 |
| Shora omezená, není zdola omezená                                            | $a_1 < 0; q > 1$                                 |
| Omezená (omezená shora i zdola)                                              | $a_1 \neq 0;  q  \leq 1$ nebo $a_1 = 0, q \in R$ |

|                                           |                      |
|-------------------------------------------|----------------------|
| není ani zdola omezená, ani shora omezená | $a_1 \neq 0; q < -1$ |
|-------------------------------------------|----------------------|

**Př. 4:** Využij výsledky předchozího příkladu ke sestavení tabulky *Vlastnosti geometrických posloupností*, která bude v levém sloupci obsahovat všechny možné kombinace hodnot členu  $a_1$  a kvocientu  $q$ .

| Vlastnosti geometrických posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem $q$ |              |                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------|--------------|----------------------------------------------|
| $a_1 = 0$                                                                     | $q \in R$    | konstantní, omezená                          |
| $a_1 \neq 0$                                                                  | $q = 0$      | omezená,                                     |
| $a_1 > 0$                                                                     | $q > 1$      | rostoucí, zdola omezená, není shora omezená  |
|                                                                               | $1 > q > 0$  | klesající, omezená                           |
|                                                                               | $0 > q > -1$ | omezená                                      |
|                                                                               | $-1 > q$     | není ani zdola omezená, ani shora omezená    |
| $0 > a_1$                                                                     | $q > 1$      | klesající, shora omezená, není zdola omezená |
|                                                                               | $1 > q > 0$  | rostoucí, omezená                            |
|                                                                               | $0 > q > -1$ | omezená                                      |
|                                                                               | $-1 > q$     | není ani zdola omezená, ani shora omezená    |

**Shrnutí:**